Základy

1. Term t je substituovatelný za x do formule φ, jestliže pro každou jeho proměnnou y žádná podformule $(\forall y)\psi$ formule φ neobsahuje výskyt y volný ve φ.

2. Axiomy o logických spojkách:
   (a) (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,
   (b) (PL1) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,
   (c) (PL1) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

3. Axiomy o kvantifikátorech:
   (a) substituce: L-formule $(\forall x)\varphi \to \varphi(x/t)$, je-li term t subst. za x do φ.
   (b) $\forall$-zavedení: L-formule $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$, není-li x z volná ve φ.

4. Rovnosti:
   (a) $x = x$
   (b) $x_1 = y_1 \to \dots x_n = y_n \to R(x_1, \dots, x_n) \to R(y_1, \dots, y_n)$
   (c) $x_1 = y_1 \to \dots x_n = y_n \to F(x_1, \dots, x_n) = F(y_1, \dots, y_n)$ 1 Pravidla dedukce:
   (d) Modus ponens (MP): Z φ a $(\varphi \to \psi)$ odvoď ψ: $\frac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi}$
   (e) Generalizace (Gen): Z φ odvoď $\forall_x(\varphi)$: $\frac{\varphi}{\forall_x(\varphi)}$

5. Pro L-teorii a L-formule φ, ψ definujeme:
   (a) φ je vyvratitelná v T, pokud $T \vdash \neg\varphi$
   (b) φ je konzistentní s T, pokud $T \nvdash \neg\varphi$
   (c) φ je nezávislá v T, pokud $T \nvdash \varphi$ a $T \nvdash \neg\varphi$
   (d) φ je silnější než ψ v T, pokud $T \vdash \varphi \to \psi$

Teorie

1. Teorie je
   (a) sporná, lze-li v ní dokázat každou její formuli, jinak je bezesporná
   (b) kompletní, je-li bezesporná a každá její sentence je v ní dokazatelná nebo vyvratitelná
   (c) extenze T je teorie T', když $L(T) \subseteq L(T') a Thm(T) \subseteq Thm(T')$
      i. jednoduchá ext., pokud je extenze a navíc $L(T) = L(T')$
      ii. konzervativní ext., pokud pro $\forall$ $L(T)-$formuli φ platí $T' \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$
   (d) axiomatizovatelná
      i. konečně, pokud je ekvivalentní s konečně axiomatizovatelnou teorií
      ii. otevřeně, pokud je ekvivalentní s otevřeně axiomatizovatelnou teorií
         A. $\Leftrightarrow \mathcal{A} \models T \& \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \to \mathcal{B} \models T$
   (e) pokud je κ-kategorická pro $\kappa \geq \|L\|$, je kompletní
   (f) modelově kompletní, pokud pro $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \models T : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$

2. **ω-kategorické kriérium kompletnosti:** T je teorie ve spočetném jazyce, která má jen nekonečné modely a je ω-kategorická $\to$ je kompletní sémanticky
   (a) T má eliminaci kvantifikátorů sémanticky $\Leftrightarrow$ T je koexistenční $\Leftrightarrow$ T je 1-koexistenční
   (b) T je f-homogenní $\Rightarrow$ má eliminaci kvant. sémanticky

Struktura

1. Struktura pro signaturu $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je $\langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$
   (a) L-struktur s univerzem $\kappa \geq \omega$ je nejvýše $2^{\kappa \cdot \|L\|}$
   (b) L-struktur s univerzem $2 \leq \kappa \leq \omega$ je nejvýše $2^{\|L\|}$
   (c) podstruktura $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jejíž $\mathcal{R}^B$ a $\mathcal{F}^B$ jsou uzavřené v B
   (d) $h : A \to B$ se nazývá *elementární vnoření*, je-li prosté a pro $\forall \varphi(\overline{x}), a \in A^{l(\overline{x})}$ platí $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[h\overline{a}]$
   pak je $\mathcal{A}$ elementární podstrukturou $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$
   (e) Dvě L-struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou elementárně ekvivalentní, platí-li v nich právě tytéž L-formule: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$
   (f) $h : A \to B$, pokud pro $\forall$ n-ární rel. symb. R, n-ární fční symbol F a $\overline{a} \in A^n$:

$$
\begin{array}{llrr}
R^A(\overline{a}) \Rightarrow R^B(h\overline{a}) & hF^A(\overline{a}) = F^B(h\overline{a}) & & homomorfismus \\
R^A(\overline{a}) \Leftrightarrow R^B(h\overline{a}) & hF^A(\overline{a}) = F^B(h\overline{a}) & & striktni\_hmo. \\
R^A(\overline{a}) \Leftrightarrow R^B(h\overline{a}) & hF^A(\overline{a}) = F^B(h\overline{a}) & prosty & isomorfni\_vnoreni \\
R^A(\overline{a}) \Leftrightarrow R^B(h\overline{a}) & hF^A(\overline{a}) = F^B(h\overline{a}) & prosty \wedge na & isomorfismus
\end{array}
$$

2. Hodnota termu: $e : Var \to A$, $e(x/a)$ funkce vzniklá z e změnou pouze x na a.
   (a) je-li t proměnná x, je $t^A[e] = e(x)$
   (b) je-li t tvaru $F(t_0, \dots, t_{n-1})$, F je $n-$ární fční symbol, je $t^A[e] = F^A(t_0^A[e], \dots, t_{n-1}^A[e])$.

3. Hodnota $H_{at}^{\mathcal{A}}(\varphi, e)$ atomické formule φ ...

4. Model L-teorie T je L-s. $\mathcal{A}$, ve které platí $\forall$ axiom L-teorie T: $\mathcal{A} \models T$
   (a) Třída $\forall$ modelů T se značí $M(T)$

5. Formule φ je pravdivá v T, je-li φ formule T a platí v každém modelu T: $T \models \varphi$ (pokud je $T \models \neg\varphi$ je φ lživá v T, není-li lživá ani pravdivá, je nezávislá v T, pokud je $T \not\models \neg\varphi$, je sémanticky konzistentní s T).
   (a)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi_0 &\Rightarrow \mathcal{A} \not\models \neg\varphi 0 \\
\mathcal{A} \models \varphi_1 nebo \dots nebo \mathcal{A} \models \varphi_n &\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n \\
M(T, \varphi_0) &\subseteq M(T) - M(\neg\varphi_0) = M(T) - M(T, \neg\varphi_0) \\
M(T, \varphi_1) \cup \dots \cup M(T, \varphi_n) &\subseteq M(T, \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \\
M(T, \varphi_1) \cap \dots \cap M(T, \varphi_n) &= M(T, \varphi_1 \& \dots \& \varphi_n)
\end{aligned}
$$

   (b) Komplet modelů T je množina K tak, že pro $(\forall \mathcal{A})(\mathcal{A} \models T \to \exists$ v $K!1 model \equiv \mathcal{A})$

6. Pro L-s. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ je **parciální vnoření** $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ prosté zobrazení $f \subseteq A \times B$ že pro $\forall$ atomickou L-form. $\varphi(\overline{x})$ a $\overline{a} \in dom(f)^{l(\overline{x})}$: $\mathcal{A} \models \varphi(\overline{x})[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\overline{x})[f\overline{a}]$
   (a) parc. vnoř. lze bezprostředně prodloužit, pokud pro $\forall a \in A\, \exists b \in B$: $f \cup \{\langle a, b \rangle\}$ je parc. vnoř. $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$

7. T je f-homogenní, lze-li $\forall$ neprázdné koneč. parc. vnoř. mezi 2 modely T bezprostředně prodloužit
   (a) T je f-homogenní $\Rightarrow$ T má eliminaci kvant

8. Elementární konjunkce je formule tvaru $\bigwedge_{i<n} \chi_i$ kde χ_i jsou atomické, nebo negace atom. form
   (a) χ je el. konj. $\to$ "$(\exists y)\chi$" je 1-primitivní form.
   (b) χ je bezkv. form.. $\to$ "$(\exists y)\chi$" je 1-existenční form.

9. T je [1-]koexistenční, když pro $\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{B} \models T$, neprázdné konečné parc. vnoř. f $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ a $\forall$ [1-]primitivní form. $\varphi(\overline{x})$ s $l(\overline{x}) > 0$ a $\overline{a} \in dom(f)^{l(\overline{x})}$ je $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[f\overline{a}]$
   (a) T je 1-koexistenční $\Leftrightarrow$ T má eliminaci kvant.

Příklady teorií

1. Teorie následníka SC: $\langle S \rangle$, S un.fční.s.
   (Q0) $(\exists x)((\forall y)(Sy \neq x) \& (\forall y \neq x)(\exists z)(Sz = y))$
   (Q2) $Sx = Sy \Rightarrow x = y$

SC-schema $x \neq S^n x; n \in \mathcal{N}$

2. Teorie následníka s nulou SC_0: $\langle S, 0 \rangle$, S un.fční.s., 0 konstatní s.
   (Q1) $Sx \neq 0$
   (Q2) $Sx = Sy \Rightarrow x = y$
   (Q7) $x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(Sy = x)$

SC-schema $x \neq S^n x; n \in \mathcal{N}$

3. Robinsonova arit. Q: $\langle S, +, \cdot, 0 \leq \rangle$, S un.f., $+, \cdot$ bin.f. 0 konst., $\leq$ bin.r.

$(Q1) Sx \neq 0$	$(Q5) x \cdot 0 = 0$
$(Q2) Sx = Sy \Rightarrow x = y$	$(Q6) x \cdot Sy = x \cdot y + x$
$(Q3) x + 0 = x$	$(Q7) x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(Sy = x)$
$(Q4) x + Sy = S(x + y)$	$(Q8) x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

4. Peanova arit. P: $\langle S, +, \cdot, 0 \leq \rangle$, S un.f., $+, \cdot$ bin.f. 0 konst., $\leq$ bin.r.
   (a) Axiomy jako Robinsonova Q.
   (b) schema indukce: $\{I_\varphi; \varphi$ je L^A-formule$\}$. I_φ je axiom indukce pro φ, tj. $(\varphi(0, \overline{y}) \& (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(Sx, \overline{y}))) \to (\forall x)\varphi(x, \overline{y})$
5. T má eliminaci kvantifikátorů $\Rightarrow$ je modelově kompletní
6. Model je prvomodel teorie $\Leftrightarrow$ lze jej elementárně vnořit do $\forall$ jejího modelu.
7. Model je algebraický prvomodel teorie $\Leftrightarrow$ lze jej vnořit do $\forall$ jejího modelu.
8. Teorie je modelově kompletní $\Rightarrow$ její algebraický model je i prvomodel
9. Teorie má prvomodel $\Rightarrow$ je kompletní

	K	MK	EK	OA	KA
DeLO	A	A		N	A
SC_0	A	A		N	N
SC	A	N		N	N

Uspořádání

1. Teorie uspořádání: $L^O = \langle \leq \rangle$, $\leq$ je $R/2$. $x \leq x, x \leq y \,\&\, y \leq x \to x = y, x \leq y \& y \leq z \to x \leq y$
2. Lineární uspořádání $+ = x \leq y \vee y \leq x$
3. Husté lin. usp. DeLO* $+ = (\exists x, y)(x \neq y)((x \leq y \,\&\, x \neq y) \to (\exists z)(x \leq z \leq y \,\&\, x \neq y))$
4. Diskrétní lin.usp. DiLO = LO +

$$(\forall x)(\exists y)(y \leq x \,\&\, y \neq x \,\&\, (\forall z)((y \leq z \leq x) \to (z = y \vee z = x)))$$

$$(\forall x)(\exists y)(x \leq y \,\&\, y \neq x \,\&\, (\forall z)((x \leq z \leq y) \to (z = y \vee z = x)))$$

   (a) DiLO* je rozšíření o bin. pred. sym $<_n$ s $n \in \mathbb{N}$
   $x <_n y \leftrightarrow x \leq y \,\&\,$ mezi x a y existuje právě n prvků

Výroková logika

1. φ, ψ formule výrokové teorie T:
   (a) $\vdash \varphi \to \varphi$
   (b) **Věta o dedukci** $T, \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$
2. T je maximální bezesporná, φ, ψ jsou její formule:
   (a) $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T \Leftrightarrow T, \varphi$ je bezesporná
   (b) $\varphi \in T \Leftrightarrow \neg\varphi \in T, \varphi \to \psi \in T \Leftrightarrow \neg\varphi \in T$ nebo $\psi \in T$
   (c) ohodnocení v tak, že $v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T$ pro $\forall$ prvovýrok T je jediný model T
3. Bezesporná T má maximální bezespornou jednoduchou extenzi
4. Teorie má model $\Leftrightarrow$ je bezesporná
   (a) kompletní sémanticky $\Leftrightarrow$ má !1 model
5. **Věta o kompletnosti** $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$
6. **Věta o kompaktnosti** T má model $\Leftrightarrow \forall$ její konečná část má model
7. Počty výroků a teorií pro výrokový jazyk $\mathbf{P}$ s $\|\mathbf{P}\| = l \in \mathbf{N}$:
   (a) neekvivalentních výroků nad $\mathbf{P}$ je 2^{2^l}
   (b) $\mathbf{P}$-teorie T má právě $2^{2^l - |M(T)|}$ neekvivalentních pravdivých a stejně tolik lživých výroků
   (c) $2^{2^l} - 2 \cdot 2^{2^l - |M(T)|}$ neekv. nezávislých výr.
   (d) $2^{|M(T)|}$ neekv. jednoduchých extenzí
   (e) $|M(T)|$ neekv. jednoduchých kompletních extenzí
8. Uzavřené, otevřené a obojetné třídy: $\mathbb{P}$ množina prvovýroků, $K \subseteq^{\mathbb{P}} 2$ třída modelů:
   (a) $\omega \in^{\mathbb{P}} 2$ je oddělitelné od K, existuje-li klauzule χ oddělující ω, tj. že $\omega \notin M(\chi) \supseteq K$, jinak je ω neoddělitelné.
   (b) třída K je uzavřená, je-li každé $\omega \in^{\mathbb{P}} 2 - K$ oddělitelné od K
   (c) třída K je otevřená, je-li každé ${}^{\mathbb{P}}2 - K$ uzavřená
   (d) třída K je obojetná, je-li otevřená i uzavřená
   (e) třída K je axiomatizovatelná $\Leftrightarrow$ je uzavřená
   (f) třída K je konečně axiomatizovatelná $\Leftrightarrow$ je obojetná

Predikátová logika

1. φ, ψ L-formule, T L-teorie
   (a) O konstantách: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$, pokud T' je extenze T o nové konst. symb. $c_1, \ldots, c_n$.
   (b) O dedukci: ψ je sentence $\to T \vdash \psi \to \varphi \Leftrightarrow T, \psi \vdash \varphi$
   (c) Dk. sporem: φ je sentence $\to (T, \neg\varphi \vdash \bot) \Rightarrow T \vdash \varphi$
2. prenexní operace:
   (a) nahraď podformuli variantou
   (b) $\neg(Qx)\psi \sim (Q'x)\neg\psi$
   (c) $(Qx)\psi \diamond \chi \sim (Qx)(\psi \diamond \chi)$, x není volná v χ
   (d) $\psi \diamond (Qx)\chi \sim (Qx)(\psi \diamond \chi)$, x není volná v ψ
   (e) $(Qx)\psi \to \chi \sim (Q'x)(\psi \to \chi)$, x není volná v χ
   (f) $\psi \to (Qx)\chi \sim (Qx)(\psi \to \chi)$, x není volná v ψ